

算数科における小学校入門期の図的表現の研究

久米 央也*

滋賀短期大学 幼児教育保育学科

Study of graphical representation at elementary school entrance period in mathematics
department

Hideya KUME*

Department of Early Childhood Care and Education, Shiga Junior College

抄録：高学年になると、「割合」「速さ」等，文章題を解くことが苦手な児童が多くなる。文章題を解くには，まず問題の構造を理解し，解決の糸口を見つけなければならない。そのためには，問題の構造をイメージ化することが大切である。本研究では，児童が問題の構造をイメージ化し解決するためには算数的表現の中の『図的表現』を，小学校入門期から授業で扱っていく必要があると考え，先行研究や小学校現場の調査，今の日本の算数科教育の現状，教科書等を検証するとともに，小学1年生で図的表現をコアにした「たし算」の授業を基に検証した。その結果，児童が問題の構造をイメージ化し解決するためには，小学校入門期から，系統的に図的表現を取り入れた算数科授業を実践していくこと，また教師が与えた図をかかせるのではなく，児童自ら考え，作り出した図をかかせることが重要であるとした。

キーワード：算数教育 小学校入門期 算数的表現 図的表現

1. はじめに

高学年に出会う「割合」では，かなりの数の児童が立式において戸惑う。そして，覚えてたの公式を使って何とか式を立てようとする。(下図)

割合＝比べる量÷もとなる量 比べる量＝もとなる量×割合 もとなる量＝比べる量÷割合

(図1)

問題文から，比べる量は何で，もとなる量は何なのかについて考察をし，立式を行う。

* E-mail: h-kume@sumire.ac.jp

ここで問題なのは、公式を暗記していなければ、立式が不可能であるということである。平成 27 年度実施された全国学力学習状況調査(2015)の算数Bで割合の問題が出ている。¹⁾(図 2)



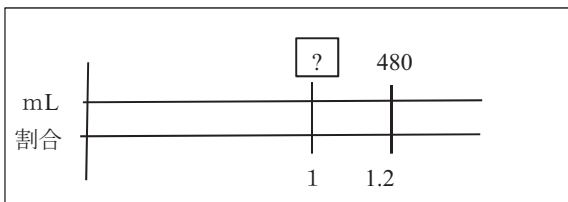
(図 2)

正答は $480 \div 1.2 = 400$ 答え 400mL となる。

正答率は 13.4% 無回答率は 4.5%。主な誤答は、 480×0.8 $480 \div 0.2$ であった。

このような誤答が多いということは、問題文から割合の概念をイメージできていないことが考えられる。

つまり、公式に当てはめようとすることに力が注がれ、比べる量やもとなる量の考察が十分でないのである。



(図 3)

図 3 のような図が念頭でイメージできれば、公式を覚えていなくても、解決の糸口は見つかる。問題文を読んだときに、このような図が自分なりにイメージできるかどうか重要なのである。

速さの学習や、分数の割り算の学習も同様に、形式的に暗記した公式などを使って解こうとする傾向があり、文章題を公式にあてはめて解かせることに重点を置く指導法に問題があるのではないかと考える。これは、算数科授業全般に言えることであり、算数導入期から、文章題をイメージ化する学習を積み重ねてこなかったことが原因ではないだろうか。

スケンプ(Skemp, R. R. 1992)は、認知説による理解の説明において理解を 2 通りに分類している。²⁾ 道具的理解と関係的理解である。

道具的理解 (Instrumental Understanding)

- ① 規則を身に付けてそれを用いる能力，いわゆる理由なき規則を用いる能力
- ② 記憶している規則を(理由がわからないままに)機械的に応用する。

関係的理解 (Relational Understanding)

- ① 行っていることも，その理由も，どちらもわかっていること
- ② 一般的な数学的関係から特殊な規則や手続きを(理由がわかった上で)引き出す

割合の概念が定着しないのは，学習がスケンプのいう道具的理解のみに終わっていたからではないか。道具的理解で終わらず関係的理解にまで理解を深めていくには，イメージ化する力，すなわち「算数的表現」中でも特に「図的表現」をコアにする指導法が小学校入門期から有効であると考えている。

本研究では，日本の入門期の算数科指導方法の問題点を明らかにした上で，「算数的表現」特に図的表現の重要性について先行研究を基に考察していく。さらに，日本の教科書の限界を考察し，それを克服していく図的表現をコアにした指導方法について「1年生たしざん」の授業実践例をもとに検討していきたい。

2 1 学年における算数科指導法の実際

数と計算領域における演算との最初の出会いは，加法である。教科書では，具体的な演算場面を絵で示し，増えたり，(増加) 合わさったり (合併) する場面をもとにして，たし算の式を教える。

その後，問題文を読ませて，そこに表現されている「あわせて」や「ぜんぶで」などのキーワードをもとに演算決定させる。

次に学習する減法においても同様に，「のこりは」や「ちがいは」というキーワードをもとにして演算決定させている指導が多いのが現状である。

指導者は，演算決定する力を評価するというより，正しく計算ができるかどうかの評価の主眼を置く傾向がある。しかるに，この単元で一番大切にしなければいけない「イメージ化する力」「算数的表現力」は育ちにくい現状がある。

これは，教科書自体の内容が「数と計算領域」において，算数的表現力よりも，計算力に軸足を置いた結果に他ならない。

次に，教員が児童に問題を考えさせるときにどのような算数的表現を使って考えさせるかを調査した。

(調査対象：小学校教員 137 名)

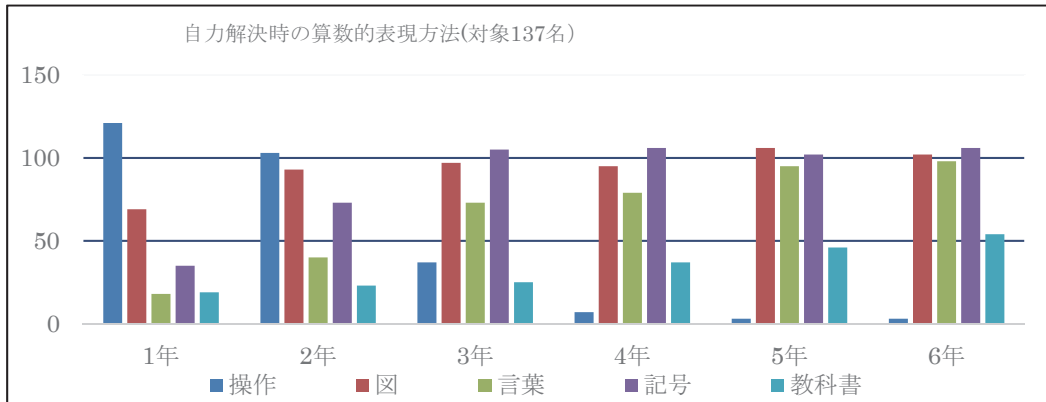
・調査内容

各学年において，算数科の授業で文章題に取り組ませる指導の時に，どのような算数的表現を用いて児童に解決させたり，指導したりするかについて，質問紙により調査した。

算数的表現を「操作により表現」「図による表現」「言葉による表現」「記号(式)による表現」「教

科書を使って指導」とした。

・調査結果 (表 1)



具体的な操作活動を通して考えさせているのは、1 年が 1 番多く 4 年以降具体的操作活動はほとんど用いていない。

2 年生から、図をかいて考えたり、数字や式で考えたりすることが多くなっているが、3 割程度の教員は図的表現を用いていないこともわかった。1 年生は具体的操作がほとんどを占め、図をかいて考えたり、数字や式で考えたりすることはあまりないことがわかる。

また、高学年になるほど、教科書の説明を使って考えさせていることもわかってきた。

これらの結果から、入門期の 1 年生において、具体的操作活動が学びの主になっており、児童自らが図をかいて考えたり説明したりする活動があまりなされていないことがわかる。また、2 年生以降においては、図的表現を自力解決時に用いる指導が多いが、3 割程度の教員は図的表現を用いていないこともわかった。

3 算数的表現(図的表現)についての先行研究

(1) 土居下ら (1986) の研究³⁾

土居下らは、小学 4 年生を対象に、正答率の低い問題 6 間について、絵図や線分図をかかせて立式できている割合を調査した。その結果、《高レベルの児童は、解けるから正しい絵図・線分図がかけるのであり、低レベルの児童は、正しい絵図・線分図がかけないから解けないのである》という結論を導き出した。つまり、低レベルの児童について、正しい絵図・線分図がかけられるようにすれば、立式できることを明らかにした。(1986. p. 77)

土居下らの研究から、4 年生において正しい絵図や線分図がかけられるようにするためには、やはり 1 年生から図的表現を授業に取り入れていくべきであることがわかる。

(2) 菊池 (1996) の研究⁴⁾

菊池は、図的表現の位置づけを 3 段階に分けて考えた。場面を具体的に表した情景図と、問題の構

造を表す線分図の間に、情景図よりは抽象的であるが線分図よりは具体的で、かいていく上で制約が少ない図を中間図と呼んだ。そして菊池は、与えられた線分図よりも、もっと自由に自分なりに図をかいてみるのが、情景を理解し解決へ至ることへの助けになることを明らかにした。

教科書にある図ではなく、自分なりに図をかくことの重要性を明らかにしたとも言える。

(3) ブルナー (J. S. Bruner 1963) の EIS 原理⁵⁾

ブルナーは、認知心理学の立場から、子どもの認知発達、次の3つの段階からなる段階的な質的過程として捉え、その順序で発達するという EIS 原理を生み出した。

- 1 行動的把握 the enactive representation
- 2 映像的把握 the iconic representation
- 3 記号的把握 the symbolic representation

子どもは、その発達段階にふさわしい固有の認知構造によって、事物を把握し、物事を表象するとし、表現するという構造もこの EIS 原理によるとしている。行動的把握とは、具体物を操作したり、実際に動いたりして把握し表現することである。映像的把握とは、事物を視覚的ないし聴覚的なイメージとして把握したり表現したりすることである。記号的把握とは、事物を言語や記号を用いて把握し表現することである。行動的把握はほぼ就学前の幼児期に、映像的把握は10歳前後までに、記号的把握は、ほぼ10歳前後から後年へと位置づけられる、としている。⁵⁾ (1972, pp. 68-79)

このことから、小学1年生からは行動的把握から映像的把握へと移行すると捉えるのがふさわしい。

ブルナーの研究は教科を特定したものではない。算数教育からみた場合、その原理の適切性や有効性の点で検討し、EIS 原理を手がかりに、算数・数学における様々な表現方法をその特性に着目して類型化し、それらの機能に基づいた活用方法を検討したのが中原である。

(4) 中原 (1999) の算数的表現の研究⁶⁾

中原はブルナーの EIS 原理を基に算数・数学における表現方法を次のように分類し児童の算数的知識の構成に不可欠であるとしている。

(1999. p. 28)

- 1 現実的表現・・・実世界の状況、実物、具体物などによる表現
- 2 操作的表現・・・学習具などに動的操作を施すことによる表現
- 3 図的表現・・・絵、図、グラフなどによる表現
- 4 言語的表現・・・日本語、英語など日常言語を用いた表現
- 5 記号的表現・・・数字、記号など数学的記号を用いた表現

例えば、繰り上がりのあるたし算の問題場面

きのう、にわとりが、たまごを8こみました。
 きょうのあさ、たまごを6こみました。
 たまごは、ぜんぶでなんこでしょう。

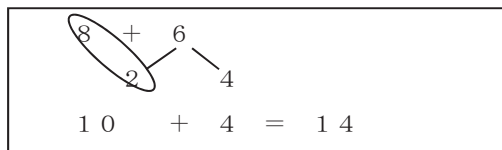
を解決するとき、児童がたまごの帽子をかぶり、卵パックのなかに8人と6人に分かれて入る。「ぱつとみて何人かわかるように動いてごらん」という問いのもと、6このたまごのうち2こが8このグループに入り、10かたまりを作って解決する。これは、現実的表現である。

そして、今度はおはじきと卵パックを使って、同じ動きを再現していく。これが操作的表現である。

また、この操作を図に書いて残していこうという指示のもと、今度は図にかき、その動きを→で表現していく。図的表現である。

この動きを言葉で説明すると、「8個に後2つ増えると10個になるので、6個から2つ動かして10個をつくります。6個から2個動かしたので4個になります。10個と4個で14個になります。」という説明である。これが言語的表現である。

そして、これらを数字と記号で表すと次のようになる。(図4) これが、記号的表現である。



(図4)

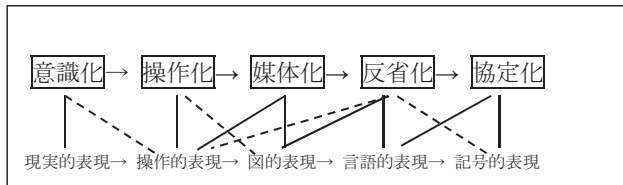
また、中原は、子どもたちが主体的な活動を通して算数的知識を構成していくための、構成的アプローチにおける学習過程を提唱している。

中原は学習過程を①意識化②操作化③媒体化④反省化⑤協定化とモデル化し表現方法との関連性を検討した。(1999. pp. 34-36)

①意識化とは「子どもが、構成しようとする算数的知識の発生源と出会い、そこから問題(源問題)を意識化し、その解決に向けて見通しを立てる段階である。②操作化とは、源問題の解決を目指した活動、とりわけ操作活動に取り組み、構成しようとする知識の原型を作り出す段階である。③媒体化とは、操作化と反省化の懸隔を埋め、両者を媒介することをねらいとしている。④反省化とは、操作化や媒体化の段階における活動を振り返って数学的抽象、数学的一般化を行い、よりよい算数的知識を構成する段階である。⑤協定化では、反省化において構成された算数的知識を整理し、そのよさなどを検討、確認、合意された結果を明文化して協定していく。

ここで大切なことは、反省化の段階である。操作化したことを意味づけ、一般化していく過程があって初めて協定化が可能になり、関係的知識の獲得が生じる。

さらに中原は、これらの学習過程に、算数的表現方法がどう関係しているかについて述べている。構成的アプローチにおける学習過程と算数的表現方法との関わりを図に表すと次のようになる。(図5)



(図 5)

この図からもわかるように、操作化から協定化に至る過程において、媒体化、反省化を支える表現方法として図的表現が欠かせないことがわかる。操作したことの意味づけをするために、図で表して確かめたり、言葉で確認したりする作業があって初めて協定化が実現するのである。つまり、「理解する」とは、操作的表現だけにとどまらず、操作したことを、図で表しさらに言語化することで、関係的理解が可能になるのである。

このことから、図的表現の重要性がわかる。

(5) 田中(2003)の研究⁷⁾

田中(2003)は、計算はできるけど、演算決定ができないという子どもがたくさん育ってしまったのは、技能や形式を子どもたちが自分なりに理解したり必要だと考えたりする前から教えてしまうことが多すぎたからであると述べ、技能の定着を、考える力とのつながりで見つめ直していくことの必要性をあげている。

また、田中は《図には次の2通りの役目がある》としている。1つは「わからないことを解決するための図」2つは「わかったことを説明するための図」である。《この2通りの役割を一緒に指導しようとするから、子どもたちは混乱するのである。ところで、多くの教師が育てたいと思っているのはその1の役割の方で、線分図に書かせるのもテープ図にするのも文章題の中の数値の関係を正しく把握させ立式を助けるためである。しかし、よく考えると、教科書も参考書もその関係がわかりやすいようにと考えて、その図を使って説明している。つまり我々がよく目にする「きれいな図」は、ほとんどが説明のための図である》(2003, p60)とし、わからないことを解決するための図を子ども自ら描かせることの重要性を説いている。

1年生から、文章題と図と式のよき関係をつくること、すなわちイメージ化することの重要性を述べているのである。

このように、特に低学年期においては、図的表現を活用してイメージモデルを持たせることは重要である。

しかし、日本の教科書は、先述した通り「図的表現」よりも「操作的表現」が主流である。また、説明のためのできあがったきれいな図的表現がかかっているだけで、子どもが欲している図とは言えない。

操作だけで「できた・わかった」と錯覚してしまったり、すでにできあがった図を見てわかったような気になっていたりとすることがある。

「操作的表現→記号化」の問題点は、操作したら結果的に答えが出るところにある。ここでの操作は、機械的な操作活動であり、深い思考は存在しない。操作的表現のみを繰り返しているだけでは、真の数学的思考力は育たないと考えている。

そこで、重要なのが「図的表現」である。自分なりに算数場面を図で表すことで、問題場面が主体的にイメージ化でき、解決の糸口が見つかる。最初は、具体的な図で表す児童も、徐々に色や形を捨象し、ドットで個を表現するようになる。

田中は、子どもたちに文章題を図に表す作業を1年生から取り入れている。最初は丁寧に色まで塗る児童が、徐々に簡略化した図に変容していく。「算数の世界ではこれでいいのだよ」と伝えることで、児童は抽象化して表現することを学び、そのよさを実感していくのである。

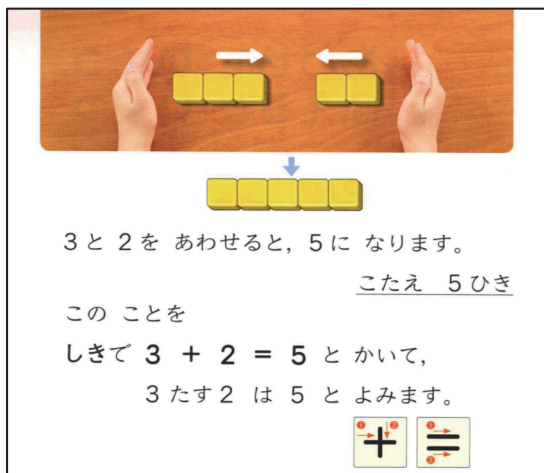
操作的表現から図的表現を大事にした授業がこれからの算数教育において大切にすべきであることが、ブルナーや中原、田中の先行研究からも明確である。

4 教科書の限界

(1) 日本の教科書

ここで、算数科教科書を検証してみる。教科書では、操作的表現を繰り返し行うこと、そして、記号的表現（立式）で考えさせようとする流れが主流である。

これは、1年生の5月に学習する「たしざん」の導入場面での教科書である。(2014)⁸⁾ (図6)



(図6)

操作的表現を用いて、たしざんをイメージ化させようとしている。教科書会社6社とも、同じような内容である。実際の学習でも、どの学級もブロックを用いて操作をして、「このことを式で $3 + 2 = 5$ とかいて3たす2は5とよみます」と教える。

本来は、操作的表現を行った後、図的表現や言語的表現で反省化し、記号的表現で協定化してい

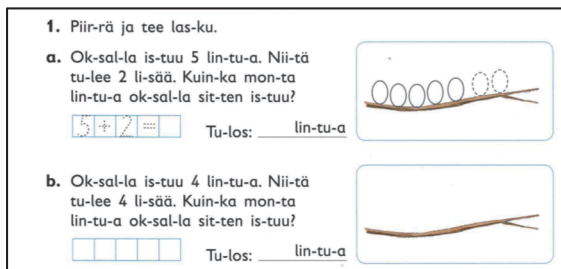
くべきであるが、教科書だけを頼りに指導をしてしまうと、図的表現や言語的表現でイメージ化することが十分できていないまま立式を教えてしまう。特に若い教師は教科書を教えることに熱心で、どんな力をつけるべきか、どんな方法で教えるべきかについての考察は十分とは言えないのが現状である。教科書に記載されている図6を「図的表現」とみなす見方もあるが、この図は授業者に操作を促すための図であり、これを見ただけで、中原のいう「図的表現」を児童が自ら行ったことにはならない。実際に、自分で抽象化した図を描くことが重要なのである。これは操作化→協定化であり、媒体化、反省化が抜け落ちてしまう危険性がある。

ここに教科書の限界がある。図的表現で考えさせたりイメージ化させたりする展開は、どの教科書会社も指導書等で明記しているが、指導書も目を通さず、教科書を教えることで精一杯の若い教師は、子どもたちにたしざんのイメージ化を十分にさせないまま次の単元へと移行してしまうことがある。このことは、1年生だけでなく、どの「数と計算」領域の演算決定の場面や計算の仕方を考える場面でも少なからず起きているのではないだろうか。

(2) 世界の教科書

ここでは、アメリカとフィンランドの1年生たし算の教科書を検証する。

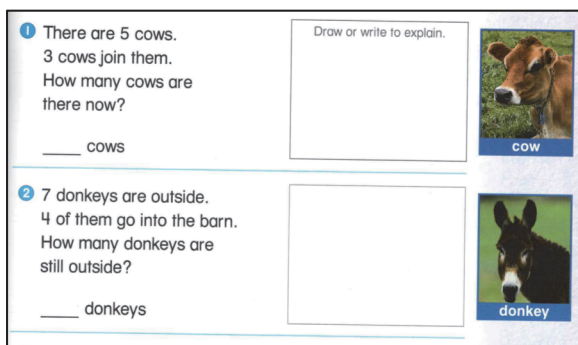
これはフィンランドの教科書である。(2014)⁹⁾ (図7)



(図7)

鳥がやってきて、増える場面を、鳥の絵ではなく、たまごで鳥を抽象化し図で表現させている。

これはアメリカの教科書である。(2002)¹⁰⁾ (図8)



(図8)

同様に、増加場面を図で考えさせている。フィンランドに比べると、抽象化する図に自由度がある。

どちらも、1年生の学習であるが、図的表現を授業でも取り入れやすいように教科書に工夫がみられた。2国とも、図的表現を学習過程に取り入れようとしていることがわかる。

5 図的表現力をコアにする算数授業の実際

ブルナー、中原、田中の先行研究、日本の教科書と世界の教科書との比較検証、日本の高学年児童の文章題をイメージ化できにくい実態から、日本の算数教育は入門期から抽象化した図的表現を児童自らが行うことの重要性をもっと認識すべきであると考ええる。

ここでは、1学年入門期の算数授業における図的表現をとりいれた授業の実践を述べ、その成果について検証していく。

・1学年 「たしざん」の授業

小学校学習指導要領解説 算数編(2008)では、¹¹⁾

(2) 加法及び減法の意味について理解し、それらを用いることができるようにする。

ア 加法、減法が用いられる場合について知ること

とある。

ここでは、増加、合併の場面を理解し、その場面を記号的表現(立式)で表していくことが目標になる。

つまり、一位数の加法の計算ができることが目標ではなく、加法(増加・合併)場面を、記号で表現することが目標となる。

教科書では、具体的場面をもとにしてブロックを用いて操作させ、

このことを、しきで $3+2=5$ とかいて、「3たす2は5」とよみます。

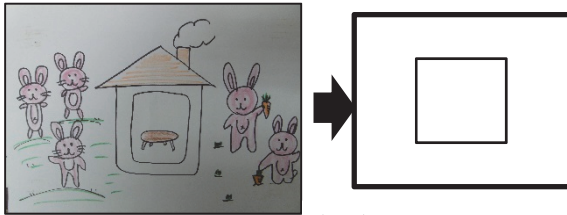
と教えている。

ブロック操作が、たしざんのイメージ化に大いに役立っていることはわかる。いきなり、立式させるのではなく、ブロックを操作させることで、合併や増加をイメージしやすいのは当然である。しかし、ブロック操作は後に残らないので、その操作そのものが念頭での操作につながりにくい。このことはブルナーのEIS原理や中原の学びの過程における反省化の重要性からも窺い知ることができる。つまり、操作的表現と記号的表現の間にワンクッションおくために、図的表現を用いる必要がある。そこで、図的表現をコアにした実践を考えた。

実際の授業では、文章題を紙芝居で提示〈現実的表現〉し、図9の長方形が書いているプリントにブロックを用いてウサギの動きを操作させた後、今の動きを絵で残していくように指示する。児童は、

四角が家であることを感じ取り、そのまわりにウサギの絵を描いていく。

3わのウサギがのはらで、あそんでいます。2わのうさぎは、はたけででにんじんをとっています。おなかがすいたので、うさぎはいえにかえってきました。



(図 9)

以下、授業記録である。

T : 「このお話を、絵に残しておきましょう」

C 1 : 「真ん中の四角は家のことだな」

C 2 : 「うさぎをかけばいい」

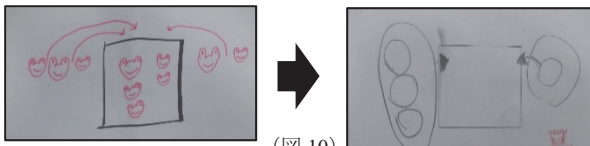
C 3 : 「めんどくさいので顔だけにしよう」

T : 「もっとかんたんにしてもいいよ」

C : 「じゃ、まるだけにしてもいい？」

T : 「もちろんいいよ。これからはまるでかいてもいいよ」

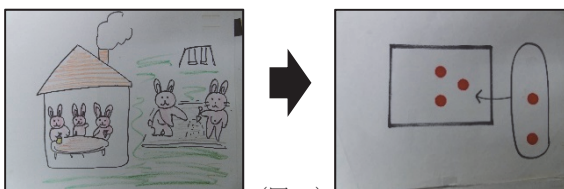
こうして、あらゆるものを捨象し、抽象化された図が完成する。図的表現が生み出されたのである。



(図 10)

さらに、問題を出していく。今度は増加の話。

3わのうさぎがいえでおちやをのんでいます。そとであそんでいた2わのうさぎがかえってきました。

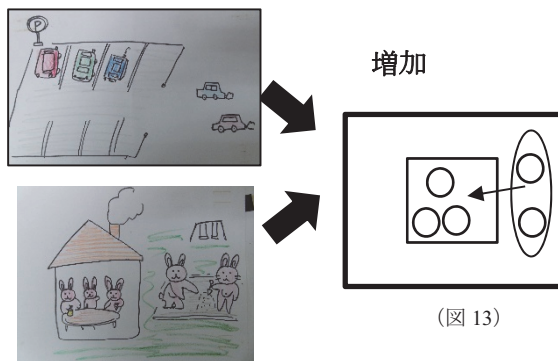
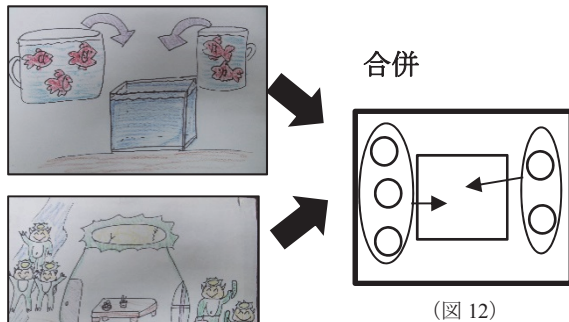


(図 11)

さらに話を続けていく。子どもたちは徐々に2通りの話があることに気づいていく。「次はどっちのお話かな」とつぶやく子もいる。

増加場面と合併場面があることに自然と気づいてくのである。そして、「ふえるお話」「あわさるお話」というように名前をつけていく。

何度も繰り返していくうち、どの話もどちらかの図に集約されていくおもしろさに気づいていく。



その後、増加、合併の紙芝居を何度も見せて、図に表していく。車も金魚も卵も、どれもドットで表現することになっていくのである。そして、最後にさらに簡単に表現するために数字を使って表現させていく。


児童は合併場面を次のように表現した。

3  2

増加場面では

 2

と表現した。

その後、児童には、 や、 の代わりに「+」という記号を使うことを教える。

児童は、「それでは、ふえるお話か、合わさるお話かわからないよ」と不満を言うが、演算の表現に於いてそこまで理解している証ととらえている。

このように、1年生の最初の演算決定の学びに於いて、図的表現、記号的表現をコアにした学習は有効に働くと考ええる。

例えば、この学習を、

現実的表現→操作的表現→記号的表現

の順で、授業を構成したとする。現実的表現から操作的表現までは、楽しく学習できるが、そこから、記号的表現に移行するときにどうしても、思考が繋がらない児童が出てくる可能性がある。操作的表現と記号的表現に乖離がみられるのである。

例えば、リンゴ8つをみて、児童がそれをおはじき8つで操作し表現した後、すぐに数字を書かせると数を間違う子が出てくる。おはじきの操作の後、ドットカードに8を表現した後、数字を書かせると間違う子はほとんどみられない。図的表現をすることにより、操作を振り返るという反省的思考が生まれるからである。このことから、操作的表現と記号的表現に図的表現を入れることの重要性がわかる。

この学習では、図的表現をコアにしたからこそ、記号的表現にスムーズに移行できたのである。

6 おわりに

授業実践を通して、図的表現の重要性を検証する。

注目すべきことは、「たしざん」の実践では、1年生の子どもたちが喜々として図的表現を楽しんでいたことである。1年生は操作活動が中心であるという固定概念が、児童の発達特性から根強く息づいていたが、ブルナーのEIS原理からも、図的表現が1年生においても有効に働くことがわかる。

また、教師が与えた図をかくのではなく、子ども自らが作りだした図を使って表現することが有効であることも明らかになった。

記号化する場面においても、田中のいう「わからないことを解決するための記号」としての立式を自ら考え出すことができた。

これらのことから鑑みると、今一度1年生の発達特性を検証し直す必要がある。中原のいう構成的アプローチによる学びの過程においては、1年生であっても図的表現や言語的表現、そして、記号的表現を主体的に使っていけるのである。

今後は、1年生の各単元において児童自らが作り出す図的表現を積極的に取り入れた指導法を開発するとともに、2年生、中学年、高学年における図的表現の有効性について研究を深め検証していきたい。このことは、やがて児童の発達特性に応じた算数的表現のカリキュラム再編につながると考えている。

参考文献

- 1) 文部科学省(2015), 「平成 27 年度全国学力学習状況調査 調査結果のポイント pp. 23」国立教育政策研究所
<https://www.nier.go.jp/15chousakekkahoukou/hilights.pdf>
- 2) スケンプ(1992) 平林一榮監訳 『新しい学習理論にもとづく算数教育—小学校の数学—』, 東洋館出版社
- 3) 土居下晃宏・志水廣・植岡利之・一崎満夫(1986)
「問題解決における方略の指導—絵や図についての児童の実態調査と実践—」 日本数学教育学会誌『算数教育』,
第 68 巻, 第 4 号, pp. 76—80
- 4) 菊池光司(1996) 「算数の問題解決における図的表現の働きに関する研究」 日本数学教育学会誌, 第 78 巻,
第 12 号, pp. 334—339
- 5) 広岡亮蔵 (1972) 『プルナー研究』明治図書
- 6) 中原 忠男著(1999)『構成的アプローチ 算数の新しい学習づくり』東洋館出版社 pp. 25—47
- 7) 田中博史著(2003)『使える算数的表現法が育つ授業』東洋館出版社 pp. 48—65
- 8) 橋本吉彦他(2014)『たのしいさんすう 1』大日本図書株式会社 p. 38
- 9) Otava(2014), 『Tuhattaituri 1b』 p. 50
- 10) Houghton Mifflin Company(2002) 『Houghton Mifflin Mathematics』 pp. 79
- 11) 文部科学省(2008) 『小学校学習指導要領解説 算数編』東洋館出版社 pp. 58,